



第14号  
September 2022

新しい空間概念を操る

こんにちは  
Kavli IPMU  
です。

私の名前は、東京大学国際高等研究所 カブリ数物連携宇宙研究機構 (Kavli IPMU)。2007年10月1日に千葉県柏市に設立されました。ここには世界中からたくさんの方々が集まっています。宇宙に関する5つの疑問に取り組んでいます。

宇宙はどのように始まったのか？  
宇宙は何でできているのか？  
宇宙はどんな運命を迎えるのか？  
宇宙を支配する法則は何なのか？  
私たちはなぜこの宇宙に存在するのか？

どれも小さいときに一度は思うような素朴な疑問ですが、答えはまだわかっていません。

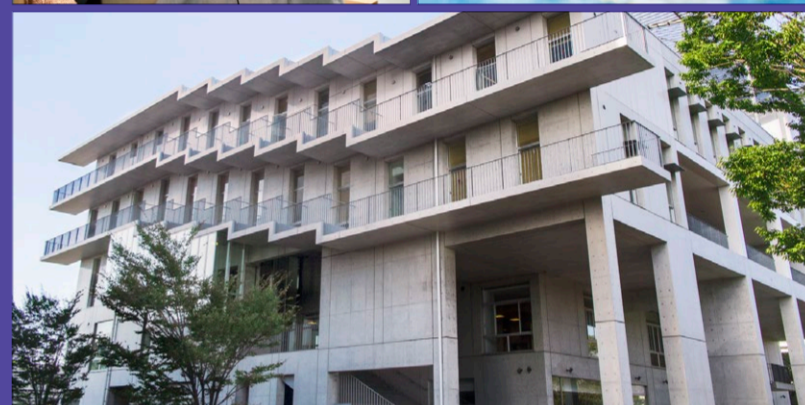
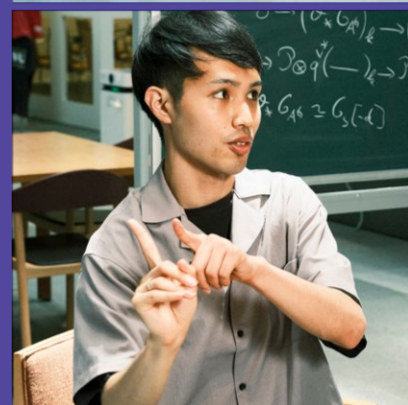
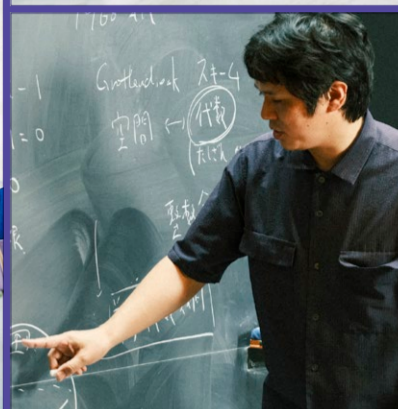
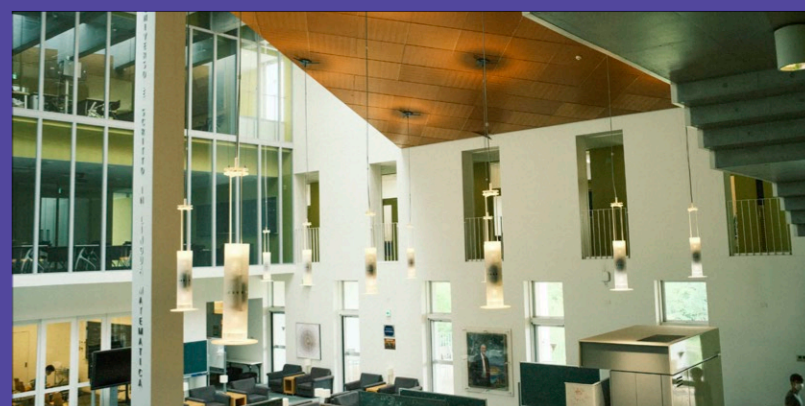
たとえば、宇宙のエネルギーのなかで、私たちが知っている物質(水素とか炭素とかです)はじつは5%にも満たないことがはつきりしています。残りの27%は得体的に「ダークマター」、さらに摩訶不思議な宇宙の68%を占めるのが「ダークエネルギー」。どちらも名前がついているものの、その正体はまったくわかっていません。いったい、宇宙は何でできているのでしょうか。

これらの疑問にせまるために、Kavli IPMUには数学、物理、天文などの第一線の研究者が集まり、分野を超えて共同研究を行っています。新型コロナウイルスが流行を始めるまでは、毎日、午後3時になると全員参加のティータイムがありました。異なる分野の研究者たちが顔を合わせて、おいしいお茶とパンを口にしながらおしゃべりに興じました。仲間と情報交換し、他分野の研究に触れ、思いがけない方向の議論が新しい研究のアイデアにつながりました。

そして5つの疑問を解くためには、新しい物の見方を生み出していくことが大事です。頭が柔らかく、ひとつの分野にとらわれない若い力が必要です。このKavli IPMUものしり新聞を読んでくれたあなたが宇宙の超難問に挑戦し、そのころには新型コロナウイルスの流行も抑えられ、私たちにぎやかなティータイムを過ごす未来が来るのが私の夢です。

東京大学国際高等研究所  
カブリ数物連携宇宙研究機構 (Kavli IPMU)  
〒277-8583 千葉県柏市柏の第5-1-5  
HP: <https://www.ipmu.jp/ja>  
Facebook: <https://www.facebook.com/KavliIPMU/>  
Twitter: @KavliIPMU  
Instagram: @kavli\_ipmu

【問い合わせ先】  
TEL 04-7136-4940  
FAX 04-7136-4941  
MAIL [inquiry@ipmu.jp](mailto:inquiry@ipmu.jp)



数学者になるには、どうすればいい？

数学に対するモチベーションを失わずに勉強や研究を続けること。

今の研究の役に立っている教科は何？

数学・英語・物理

おすすめの教科書は？

Robin Hartshorne  
「Algebraic Geometry」  
Daniel Huybrechts  
「Fourier-Mukai transforms in Algebraic Geometry」

上原北斗・戸田幸伸  
「接続層の導来圏と代数幾何学」

もっと勉強しておけば良かったと思う教科は何？

あまりそのようなことは考えず、勉強したいと思った時に勉強するようにしています。

好きな食べ物と嫌いな食べ物は？

好きな食べ物(飲み物)はラーメン、コーヒーなど。嫌いな食べ物は特にありません。

自分が研究者に向いていると思うのは、どんなところ？

数学が好きで、研究に没頭できること。

研究者に向いていないと思うのは、どんなところ？

コミュニケーション力が不足しているところ。

宇宙人っていませんか？  
分かりませんが、友好的な関係が築けるなら宇宙人数学者と議論したい。

好きな数式は何ですか？  
2008年に自分が発見した  $PT = \exp(N)L$  という式。  
3次元カラビヤウ多様体上の曲線の数え上げを導来圏の対象の数え上げで記述します。

他分野の研究をどのくらい知っていますか？  
数学はある程度。物理は自分と関連する部分が必要になったときに勉強しています。天文はほとんど知りません。

Q10  
研究者へ10の質問！

数学者になるには、どうすればいい？

数学者もしくは数学科に在籍している人と知り合いになることをお勧めします。

今の研究の役に立っている教科は何？

数学と英語です

おすすめの教科書は？

代数幾何志望なら Fulton  
「Toric varieties」と Lazarsfeld  
「Positivity in Algebraic Geometry」が特におすすめです。

この二冊を読んで代数幾何が好きになりました。

宇宙人っていませんか？

宇宙人ですか。はい、いますね。

好きな数式は何ですか？

正多角形の対角線の長さに関する式  $\sin(\pi/N) \times \sin(2\pi/N) \times \dots \times \sin((N-1)\pi/N) = N/(2^{N-1})$  この等式の証明を見て複素数が好きになりました。

もっと勉強しておけば良かったと思う教科は何？

歴史です。海外の研究者と肖像画美術館に行った際に、知らない人の肖像画しかなくて悲しくなりました。

好きな食べ物と嫌いな食べ物は？

好き: カレー、ホワイトチョコ  
嫌い: 梅干し

自分が研究者に向いていると思うのは、どんなところ？

調べものを飽きずに続けられるところ、負けず嫌いなところ。

友人の研究の話を知っていますか？

数学以外のことは全く分かりません。

Q10  
研究者へ10の質問！

研究者に向いていないと思うのは、どんなところ？

Youtubeを見始めると何時間でも見てしまうところ、他人と自分を比べてしまうところ。

## 戸田幸伸

とだ・ゆきのぶ ● Kavli IPMU 教授。専門は代数幾何学。代数多様体上の接続層の導来圏と、3次元カラビヤウ多様体上の Donaldson-Thomas 不変量の研究に取り組んでいる。古典的な代数幾何学の理論と抽象化された近代数学が絡み合う境界に興味を持っている。

## 金城翼

きんじょう・たつき ● 東京大学大学院数理学部研究科博士課程。専門は代数幾何学。コホモロジー的 Donaldson-Thomas 理論を研究。「モジュライ空間」と呼ばれる図形に関する興味深い現象を発見・証明することがテーマ。



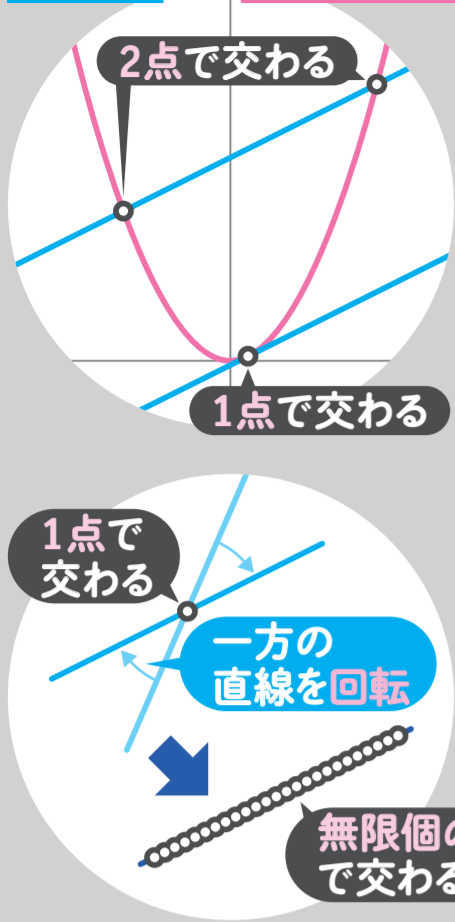
第14号  
September 2022

2022年9月30日発行  
発行所 東京大学国際高等研究所  
カブリ数物連携宇宙研究機構 (Kavli IPMU)  
〒227-8583  
千葉県柏市柏の葉5-1-5  
電話 04-7136-4940  
FAX 04-7136-4941  
https://www.ipmu.jp/ja

巻と無限巻

# 新しい空間概念を操る

直線  $y=2x$  と 放物線  $y=x^2$



たとえば「 $y=2x$ 」をグラフで描くと直線に、「 $y=x^2$ 」なら放物線になる。

このように多項式による方程式が定義する空間(図形)を考えるのが代数幾何学だ。

放物線と直線が交わる場合を考えよう。交点を求めるために二次方程式を解くと、解が

$$8 < j0^g_{vc} >$$

$$w^m_s w_c^*$$

$$+ \# h_8^1$$

たとえば集合A、集合B……のようにいくつかの集合があったとき、それぞれを個別に考えるのではなく、集合同士の関係性も合わせて考えるのが「圏」だ。圏とはいわば、数学的对象物たちのコミュニティのようなものである。圏というときには、たとえばAとBの間の2者の関係性だけを考えるが、「無限圏」では3者、4者、5者、……、といったようにより多くの数学的对象の間の関係性を考える。無限圏は、圏と比べて情報が圧倒的に増える。

左上の図は導来代数幾何学による新しい空間を示したもの。話者を囲む4つの図形は方程式で定義した空間4つを表し、三角錐は、それらの空間の関係性を示す設計図を表している。通常の代数幾何学では、圏を用い、2人で話し合うことで空間をつくれればよい。しかし、たとえば1つの頂点の空間にある直線同士の重なり合いである場合、2人で話し合うだけではうまく空間をつくることができない。導来代数幾何学では、無限圏を用い、まずは辺の両端の話者が話し合い、さらに面を構成する頂点を含めた3人で話し合い、最後に4人全員で話し合っって空間をつくることになる。ただし今のところ、無限圏を通じてできた空間は謎に満ちており、その構造の解明は数学者にとっても難解な問題である。

2個出る、つまり

り2点で交わることが分かる。では放物線と直線が1点で接している場合はどうだろうか。この場合、方程式を解けば同じ解を2個持つ(=重根)とわかるが、空間を見る限りは交点は1点で、解が2個あることを読み取ることはできない。

このような問題をきっかけとして代数幾何学の中で1960年代に「スキーム論」という考え方が登場した。これを用いると、重根を持つ空間が定まる。スキーム論では可換環(代数幾何学における足し算・掛け算ができる集合)と空間とが根底では同じものであり、空間を見ると交点が1点に見えるものでも、可換環を見れば2つの解を持つという情報を読み取ることができるようになるのだ。

さらに21世紀に入ると「導来代数幾何学」という新しい考え方が登場した。2本の直線の交点は1点だ。ここで一方の直線を回転させてみよう。すると2本の直線がぴたりと重

点が無限個になっているのだが、空間を見ただけでは、2本の直線が重なっているというだけではわからない。導来代数幾何学は、この無限個の交点を仮想的に一つの交点として扱うことができる、新しい空間概念なのだ。最先端の数学である「無限圏」を使うと、このような空間を貼り合わせて更に新しい空間を作ることができる。(コラム参照)

Kavli IPMUの数学者、戸田幸伸さんと金城翼さんは、この導来代数幾何学を操る。「三次元カラビヤウ多様体上のドナルドソン・トーマス不変量について研究しています」と戸田さん。導来代数幾何学は、もともと整数値である不変量を、より深い情報を持つたものにする道具だという。

ドナルドソン・トーマス不変量

戸田さんと金城さんが研究しているドナルドソン・トーマス不変量は、三次元カラビヤウ多様体上の曲線を数え上げるもので、曲線の形と大きさを指定すると、その様な曲線を仮想的に数え上げる整数が定まる。この整数を「ベクトル空間」や「無限圏」に拡張することで、整数を見ていただけでは見えなかった構造が見えてくる。整数値である不変量をベクトル空間や無限圏にするための道具として、導来代数幾何学を用いている。

代数学

数の代わりに文字を用いて方程式の解法などを研究する学問。代数学において、足し算や掛け算ができる集合を可換環と呼ぶ。たとえば整数全体の集合や多項式全体の集合は可換環である。