



第 8 号
January 2020

方程式の真の姿
をとらえる

こんにちは
Kavli IPMU
です。

私の名前は、東京大学国際高等研究所 カブリ数物連携宇宙研究機構(Kavli IPMU)。2007年10月1日に千葉県柏市に設立されました。ここには世界中からたくさんの研究者が集まっていて、宇宙に関する5つの疑問に取り組んでいます。

- 宇宙はどのように始まったのか？
- 宇宙は何でできているのか？
- 宇宙はどんな運命を迎えるのか？
- 宇宙を支配する法則は何なのか？
- 私たちはなぜこの宇宙に存在するのか？

どれも小さいときには一度は思うような素朴な疑問ですが、答えはまだわかっていません。

たとえば、宇宙のエネルギーのなかで、私たちが知っている物質(水素とか炭素とかです)はじつは5%にも満たないことがはつきりしています。残りの27%は得体的に「ダークマター」、さらに摩訶不思議な宇宙の68%を占めるのが「ダークエネルギー」。どちらも名前はあるものの、その正体はまったくわかっていません。いったい、宇宙は何でできているのでしょうか。

これらの疑問にせまるために、Kavli IPMUには数学、物理、天文などの第一線の研究者が集まり、分野を超えて共同研究を行っています。毎日、午後3時になると全員参加のティータイムが始まります。異なる分野の研究者たちが顔を合わせて、おいしいお茶とパンを口にしながらおしゃべりに興じます。仲間と情報交換し、他分野の研究に触れ、思いがけない方向の議論が新しい研究のアイデアにつながります。

そして5つの疑問を解くためには、新しい物の見方を生み出していくことが大事です。頭が柔らかく、ひとつの分野にとられない若い力が必要です。このKavli IPMUものしり新聞を読んでくれたあなたが宇宙の超難問に挑戦し、私たちにぎやかなティータイムを過ごす未来が私の夢です。

東京大学国際高等研究所
カブリ数物連携宇宙研究機構 (Kavli IPMU)
〒277-8583 千葉県柏市柏の葉5-1-5
HP <http://www.ipmu.jp/ja>
Facebook <https://www.facebook.com/KavliIpmu/>
Twitter @KavliIPMU

【問い合わせ先】
TEL 04-7136-4940
FAX 04-7136-4941
MAIL inquiry@ipmu.jp



Q10
研究者へ
10の質問!

阿部知行

あべ・ともゆき ● Kavli IPMU 准教授。専門は数論幾何学。研究テーマはいくつかあるが、正標数体上のコホモロジーを主な研究対象としている。正標数体上には ℓ 進コホモロジーと p 進コホモロジーと呼ばれる全く別のコホモロジー論が存在するが、それらが深い場所につながっているのは面白い。

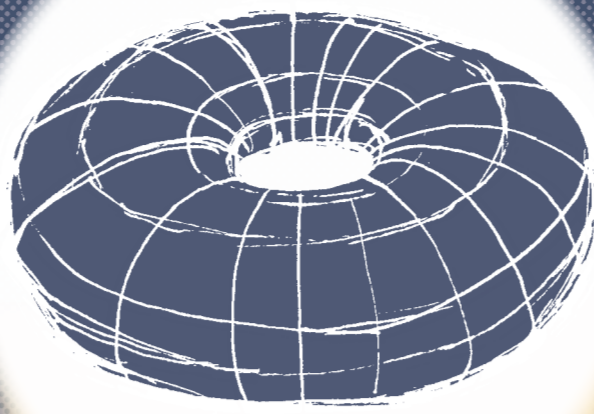


Q10
研究者へ
10の質問!

John Welliaveetil

ジョン・ウェリアヴィーティル ● Kavli IPMU 特任研究員。専門は非アルキメデス幾何学。非アルキメデス空間におけるエタールコホモロジーの問題に取り組んでいる(エタールコホモロジーとは、ちょうど現実世界の対象が形、色、大きさで表現できるように、幾何学的対象が持っている基本的な属性を見出す手段です)。

方程式の真の姿をとらえる



$$y^2 = x^3 + ax + b$$

方程式



第8号
January 2020

2020年1月10日発行
発行所 東京大学国際高等研究所
カブリ数物連携宇宙研究機構 (Kavli IPMU)
〒277-8583
千葉県柏市柏の葉5-1-5
電話 04-7136-4940
FAX 04-7136-4941
http://www.ipmu.jp/ja

デアは19世紀にはすでにあったが、具体的に数論幾何という分野が確立したのは今から数十年ほど前のことである。現在は、幾何学化できている数

デアは19世紀にはすでにあったが、具体的に数論幾何という分野が確立したのは今から数十年



数論に幾何学を取り入れるアイ

などといった数論的な問題を、幾何学的なテクニックを使って明らかにしようという分野です」とウエリアヴィーテルさん。「幾何学化することで感覚的にとらえられるようになり、問題にアプローチしやすくなる」と阿部さんはいう。



Kavli IPMUの数学者、阿部さんとウエリアヴィーテルさん。数論幾何は、方程式の整数解の個数



現代整数論の考え方



$x^2 + y^2 = 1$ という方程式は、無限個の有理数 ($-\frac{2}{3}$ など分数の形で書ける数) の解を持つ。一方で、 $x^2 + y^2 = 3$ は有理数解を1つも持たない。この違いをどう説明したらよいだろうか。そこで p という素数を考え、 Q_p と呼ばれる「法 p に関する合同」に似た世界を考えよう (「法 p に関する合同」とは、時計の針で「12が0と同じ」であるように、「 p が0と同じ」だったり、「 $p+2$ が2と同じ」だったりする世界のことであり、 Q_p はこの世界を下敷きに構成される数体系である)。すると、上の2つの方程式が「有理数解を持つか否か」という問いは、「実数 ($-\pi$ など我々の住む数体系) の解を持ち、かつ全ての p に対して Q_p で解を持つか否か」という問いに置き換わる。つまり有理数解を考える問題において、実数や Q_p という数体系の世界から方程式に光を当てるのである。

実数や Q_p の世界は有理数の世界に比べるとずっと簡単で、解の有無を調べられる。実際、「法 p に関する合同」の世界なら、 x と y には0から $p-1$ までの数しか入れる必要がないので、調べようと思えば簡単に調べられるのである。 Q_p の世界はこれよりは複雑だが、同じような具合で解の有無が決定できる。このように、方程式の整数論的な問題 (つまり有理数に属する問題) を調べる際に、実数や Q_p という簡単な世界で考え、その情報をまとめることで問題の答えが出るという思想は一般に「ハッセの原理」と呼ばれ、現代の整数論の根幹に位置する考え方である。(阿部知信)

$$x^n + y^n = z^n$$

*1 フェルマーの最終定理

n が3以上の自然数のとき、 $x^n + y^n = z^n$ となる自然数の組 (x, y, z) は存在しないという定理。1994年にイギリスの数学者、アンドリュー・ワイルズによって証明された。

*2 双子素数の問題

双子素数とは、3と5、5と7のように、差が2である素数のペアのこと。このような双子素数が無限に存在するかどうかという問題。

方程式を1つ固定してその性質を調べることを考えよう。同じ方程式でも、複素数、実数、有理数、整数と、舞台となる数の「世界」を変えると、方程式の解が描く図形や解の個数も変わってくる。数論幾何では、自然数の最小構成単位である素数を使って作る、それぞれが全く異なる数体系の世界——有限体や p 進数体で考えることで、面白い手がかりが得られるという。例えば、3という素数で作られる世界からその方程式に光を当てると、実数の世界からの光で見たのとは違う形の影が浮かび上がる。次に5という素数の世界から光を当てると、また別の姿が映し出される。このようにして、いろいろな数の世界から光を当てていくことで、その方程式の真の姿 (実数の世界だけではわからなかった姿) をとらえられるのではないかと、数学者は思っているのである。

