WDVV代数とは?

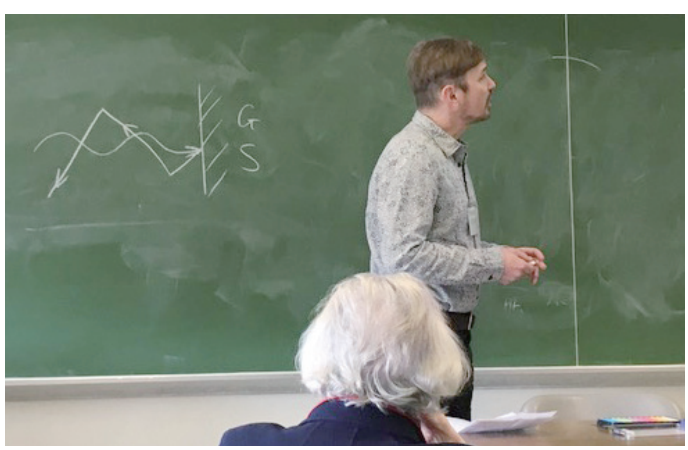
アレクサンダー A. ボロノフ

ミネソタ大学数学科教授、Kavli IPMU 客員上級科学研究員

「ウィッテン-ダイクグラーフ-フェアリンデ-フェアリンデ（WDVV）代数とは何ですか?」とよく聞かれます。私はいつも喜んで説明します。何と言ってもその定義は WDVV 代数が役に立つのと同じくらい美しいものです。そして私は一度見たら決して忘れないような覚えやすい規則をこの定義に組み込んだのです! では、始めましょう。「WDVV 代数」とは、$n \geq 2$ であるような整数 n に対して一つ定まる次に述べるような結合則を満たす次数 $2(n-2)$ の次数付対称多重線型演算（$v_1, v_2, \ldots, v_n$）をもつ次数付きベクトル空間 V です。V上の可換積（v_1, v_2）の形式的変形を“ウィッテン”$w \in V$, “ダイクグラーフ”$d \in V$, “フェアリンデ”兄弟全員 $v \in V$ に対して次のように定義します。

$$(w, d)_v := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (w, d, v, v, \ldots, v)\, \lambda^k, \quad v \text{ は } k \text{ 番目の項で } k \text{ 回現れる。}$$

ここで λは形式的変数です。[1]　すると、条件は変形双一次積 $(w, d)_v$ が結合則を満たすこととなります。どうやら名前に関連してちょっとした議論があり、この構造は「超交換代数」[2] と呼ばれることの方が多いようです。また V 上の「線形フロベニウス多様体」の構造と同値です。



写真提供: Takashi Kimura ボストン大学教授。

[1] 裏表紙の「λ進トポロジー」参照。

[2] Ezra Getzler, **Operads and moduli spaces of genus 0 Riemann surfaces**. *The moduli space of curves (Texel Island, 1994)*, 199–230, Progr. Math., 129, *Birkhäuser Boston, Boston, MA*, 1995.