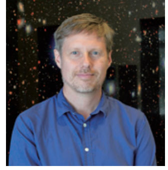
KAVLI IPMU NEWS

Kavli Institute for the Physics and Mathematics of the Universe
カブリ数物連携宇宙研究機構
World Premier International Research Center Initiative
世界トップレベル研究拠点プログラム
The University of Tokyo Institutes for Advanced Study
東京大学国際高等研究所

No. 42 June 2018



λ進トポロジー

アレクサンダー A. ボロノフ
ミネソタ大学数学科教授、Kavli IPMU 客員上級科学研究員

$a_n \to 0$ である限り、あらゆる級数 $\Sigma_{n=1}^{\infty}\ an$ が収束する世界は素晴らしいと思いませんか? まず第一に微分積分学 I の試験で落第点を取ることがなくなります! こういう世界もあって、その世界を数学者と物理学者はどちらも同じように都合に応じて使ってきました。その世界とは、λ進トポロジーの世界です。簡単な場合、これは複素数を係数に持つλの多項式の全体、$\mathbf{C}[\lambda]$ が作る空間上のトポロジーです。λ進トポロジーは次のような0の基本近傍系 $\mathbf{C}[\lambda] \supset \lambda\mathbf{C}[\lambda] \supset \lambda^2\mathbf{C}[\lambda] \supset \ldots$ によって定義されます。もしこのトポロジカル空間に全てのコーシー列の極限を加えて完備化すれば、λの形式的べき級数の空間 $\mathbf{C}[[\lambda]]$ が得られます。すると、任意の複素数 a_n に対して級数 $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$ は全てこの空間で収束します。実は、これは λ進トポロジーでは $n \to \infty$ で $a_n\lambda^n \to 0$ だからです。与えられた素数 p に対し、同様に p 進数 $\mathbf{Q}_p$ の環を構成することも可能です。p 進数は $a_n = 0, 1, \ldots, p-1$、k をある整数（負であることもあり得る）として形式的べき級数 $\Sigma_{n=k}^{\infty} a_n p^n$ で与えられます。また、下に示すように逆極限によりべき級数環と p 進整数 $\mathbf{Z}_p$ を構成する方法もあります。

Formal power series: $\mathbb{C}[[\lambda]] = \varprojlim_{n} \mathbb{C}[\lambda]/\lambda^n\mathbb{C}[\lambda]$

Formal Laurent series: $\mathbb{C}((\lambda)) = \varinjlim_{N} \lambda^{-N}\mathbb{C}[[\lambda]]$, $N>0$

For $f_0=f_0(\lambda), f_1=f_1(\lambda), \ldots$ in $\mathbb{C}[[\lambda]]$, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converges in $\mathbb{C}[[\lambda]]$ as long as $f_n(\lambda) \to 0$ in $\mathbb{C}[[\lambda]]$

For example, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$ converges for any $a_0, a_1, \ldots$ in $\mathbb{C}$

For a prime p: $\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ p-adic integers

$\mathbb{Q}_p = \left\{ \frac{x}{p^N} \,\middle|\, x \text{ in } \mathbb{Z}_p, N>0 \right\}$ p-adic numbers

Kavli IPMU News No. 42 June 2018

Published by Kavli Institute for the Physics and Mathematics of the Universe
The University of Tokyo Institutes for Advanced Study
5-1-5 Kashiwanoha, Kashiwa, Chiba pref., 277-8583, Japan
phone: +81-4-7136-4940 fax: +81-4-7136-4941

発行 東京大学国際高等研究所 カブリ数物連携宇宙研究機構
千葉県柏市柏の葉5-1-5 〒277-8583
電話：04-7136-4940 ファックス：04-7136-4941
http://www.ipmu.jp/
press@ipmu.jp

Chief Editor Kenzo Nakamura
Production Cooperation Matsueda Printing Inc.

ISSN2187-3097